2021 - Theory

අනුකලනය - පසුගිය විභාග ගැටළු විශ්ලේෂණය

2000

01. (අ) සුදුසු ආදේශකයක් උපයෝගී කරගනිමින් $\int_1^8 \frac{1}{(x^{4/3}+x^{2/3})} dx$ අගයන්න.

(ආ) $I = \int_0^{\pi} e^{-2x} \cos x \, dx$ හා $J = \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin x \, dx$ යයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය උපයෝගී කරගනිමින් $I = 2J$ හා $J = 1 + e^{-2\pi} - 2I$ බව පෙන්වන්න. එනයින් I හා J ලබා ගන්න.

(ඇ) $\int \frac{x^2 - 5x}{(x-1)(x+1)^2} dx$ සොයන්න.

2001

02. (අ) සුදුසු ආදේශයක් යෙදීමෙන් $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}} dx$

(ආ) කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන් $\int_2^4 x \ln x \, dx = a \ln b + c$ බව පෙන්වන්න.

(ඇ) $\int_0^1 \frac{(7x - x^2)}{(2-x)(x^2+1)} dx$ සොයන්න.

2002

03. (a) සුදුසු ආදේශයක් යෙදීමෙන් $\int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} dx$ අනුකලනය අගයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_0^1 x \tan^{-1} x \, dx$ අගයන්න.

(c) $\int_1^2 \frac{5x-4}{(1-x+x^2)(2+x)} dx$ සොයන්න.

2003

04. (a) සුදුසු ආදේශයක් යෙදීමෙන් $\int_1^8 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ අනුකලනය අගයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_0^1 x \tan^{-1} x \, dx$ අගයන්න.

(c) $\int \frac{dx}{x(x^2+3)}$ සොයන්න.

2004

05. (a) සුදුසු ආදේශකයක් යොදාගනිමින් $\int_{11}^{23} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x+3}}$ අගයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int e^{3x} \cos 4x \, dx$ සොයන්න.

(c) $\int \text{Sin}^4 2x \, dx$ සොයන්න.

2005

06. (a) $\text{Tan} \frac{x}{2} = t$ ආදේශ යොදා ගනිමින් $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+4\sin x}$ අනුකලනය අගයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදා ගනිමින් $\int_0^1 15x \sqrt[3]{1+x^2} \, dx$ අනුකලනය අගයන්න.

(c) $\int \frac{x^2 - 10x + 13}{(x-2)(x^2-5x+6)} dx$ සොයන්න.

2006

07. (a) සුදුසු ආදේශයක් යෙදීමෙන් $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2\cos x + \sin x}$ අනුකලනය අගයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int e^{4x} \sin 3x \, dx$

(c) භින්න භාග භාවිතයෙන් $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$ සොයන්න.

2007

08. (a) භින්න භාග උපයෝගී කරගනිමින් $\int \frac{x^3 + 1}{x(x - 1)^3} dx$ සොයන්න.

(b) $25\cos x + 15 = A(3\cos x + 4\sin x + 5) + B(-3\sin x + 4\cos x) + C$ වන ආකාරයට A, B හා C සොයන්න. එනයින් $\int \frac{25\cos x + 15}{3\cos x + 4\sin x + 5} dx$ සොයන්න.

(c) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය උපයෝගී කර ගනිමින් $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx = \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx = \frac{5.3}{6.4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{5\pi}{32}$ බව පෙන්වන්න. එනයින් $\int_0^{\pi/6} \sin^6 3x \, dx$ අගයන්න.

2008

09. (a) භින්න භාග උපයෝගී කරගනිමින් $\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)^2}$ සොයන්න. $a \neq 0$ වේ.

(b) (i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) = 2^x$ බව පෙන්වන්න.

(ii) $\int 2^x \, dx$ සොයන්න.

(iii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int_{-1}^{1} 2^{\sqrt{x+1}} dx$ අගයන්න.

2009

10. (a) $I_k = \int \frac{e^t}{t^k} dt$ යැයි ගනිමු. මෙහි $t > 0$ වන අතර k ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි. $(k - 1) I_k - I_{k-1} + \frac{e^t}{t^{k-1}} = C$ බව පෙන්වන්න. $\int e^x \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^2 dx$ සොයන්න. මෙහි $x > -1$ වේ.

(b) f යනු තාත්වික සංඛ්‍යා කුලකය මත අර්ථ දක්වා ඇති තාත්වික අගයක් ගන්නා ශ්‍රිතයක් වන අතර $J = \int_0^a f(x) \, dx$ වේ. $\int_0^a f(a - x) \, dx = J$ බව පෙන්වන්න. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2k} x}{\cos^{2k} x + \sin^{2k} x} dx$ අගයන්න. මෙහි k ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.

2010

11. (i) භින්න භාග උපයෝගී කර ගනිමින් $\int \frac{2x}{(1 + x^2)(1 + x)^2} dx$ සොයන්න.

(ii) $I = \int e^{ax} \cos bx \, dx$ හා $J = \int e^{ax} \sin bx \, dx$ යැයි ගනිමු. මෙහි a හා b යනු ශුන්‍ය නොවන තාත්වික සංඛ්‍යා වේ.

(a) $bI + aJ = e^{ax} \sin bx$, (b) $aI - bJ = e^{ax} \cos bx$ බව පෙන්වන්න. එනයින් I හා J සොයන්න.

(iii) $x^3 t + 1 = 0$ ආදේශය උපයෝගී කර ගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ $\int_{-1}^{-1/2} \frac{dx}{x(x^3 - 1)} = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{9}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

2011

12. (i) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය යොදාගනිමින්, $\int_1^e x^{3/2} \ln x \, dx$ අගයන්න.

(ii) $t = \tan x$ යැයි ගනිමු. $\cos 2x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\sin 2x = \frac{2t}{1 + t^2}$ හා $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + t^2}$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින් $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{4\cos 2x + 3\sin 2x + 5}\, dx = \frac{1}{12}$ බව පෙන්වන්න.

(iii) a හා b යනු ප්‍රභින්න තාත්වික සංඛ්‍යා යැයි ගනිමු.

$x \in R - \{a, b\}$ සඳහා $\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$ වන අයුරින් A හා B නියත සොයන්න. ඉහත සමීකරණයේ x, a හා b සුදුසු ලෙස ප්‍රතිස්ථාපනය කරමින්, $\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ යන්න භින්න භාග ඇසුරෙන් ලියා දක්වා, ඒනයින් $\int \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx$ සොයන්න.

2012

13. (i) $\int_0^{\pi} (\sin^3 x - \cos^3 x)\, dx = \frac{4}{3}$ බව පෙන්වන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුලකනය යොදාගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, $\int x^3 \tan^{-1} x\, dx$ සොයන්න.

(c) භින්න භාග යොදාගනිමින් $\int \frac{2x^2 - 3}{(x-2)^2 (x^2+1)}\, dx$ සොයන්න.

2013

14. (a) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int x^2 \sin^{-1} x\, dx$ සොයන්න.

(b) භින්න භාග භාවිතයෙන් $\int \frac{x^2 + 3x + 4}{(x^2 - 1)(x+1)^2}\, dx$ සොයන්න.

(c) $a^2 + b^2 > 1$ වන පරිදි $a, b \in R$ යැයි ද,

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a + \cos x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x}\, dx$ හා $J = \int_0^{\pi/2} \frac{b + \sin x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x}\, dx$ යැයි ද ගනිමු.

$aI + bJ = \pi/2$ බව පෙන්වන්න. $bI - aJ$ සැලකීමෙන් I හා J හි අගයන් සොයන්න.

2014

15. (a) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}\, dx$ සොයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int_0^{e^{\pi}} \cos(\ln x)\, dx = -1/2(e^{\pi} + 1)$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx$ සූත්‍රය පිහිටුවන්න. මෙහි a යනු නියතයකි.

$p(x) = (x - \pi)(2x + \pi)$ යැයි ද $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{p(x)}\, dx$ යැයි ද ගනිමු.

ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{p(x)}\, dx$ බව පෙන්වන්න.

I සඳහා වූ ඉහත අනුකල දෙක භාවිතයෙන් $I = 1/2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{p(x)}\, dx$ බව අපෝහනය කරන්න.

ඒ නයින් $I = \frac{1}{6\pi} \ln(1/4)$ බව පෙන්වන්න.

2015

16. (a) $\int_0^{\pi} f(x)\, dx = \int_0^{\pi} f(\pi - x)\, dx$ බව පෙන්වන්න.

$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}$ බවත් පෙන්වන්න.

ඒනයින්, $\int_0^{\pi} x \sin^2 x\, dx = \frac{\pi^2}{4}$ බව පෙන්වන්න.

(b) සුදුසු ආදේශයක් හා කොටස් වශයෙන් අනුකලන ක්‍රමය භාවිතයෙන් $\int x^3 e^x\, dx$ සොයන්න.

(c) $\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒනයින් $\frac{1}{x^3 - 1}$ යන්න x විෂයයෙන් අනුකලනය කරන්න.

(d) $t = \tan\frac{x}{2}$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5 + 4\cos x + 3\sin x} = \frac{1}{6}$ බව පෙන්වන්න.

2016

17. (i) (a) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$ සොයන්න.

(b) $\frac{d}{dx}(\sqrt{3 + 2x - x^2})$ සොයා, ඒ නයින් $\int \frac{x - 1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}\, dx$ සොයන්න.

ඉහත අනුකල භාවිතයෙන් $\int \frac{x - 1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}\, dx$ සොයන්න.

(ii) $\frac{2x - 1}{(x + 1)(x^2 + 1)}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, ඒනයින් $\int \frac{(2x - 1)}{(x + 1)(x^2 + 1)}\, dx$ සොයන්න.

(iii) (a) $n \neq -1$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int x^n (\ln x) dx$ සොයන්න.

(b) $\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\, dx$ අගයන්න.

2017

18. (a) (i) $\frac{1}{x(x + 1)^2}$ භින්න භාග ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කර, ඒ නයින් $\int \frac{1}{x(x + 1)^2}\, dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int xe^{-x}\, dx$ සොයන්න. එනයින් $y = xe^{-x}$ වක්‍රයෙන් ද $x = 1$, $x = 2$ හා $y = 0$ සරල රේඛා වලින් ද ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.

(b) $c > 0$ හා $I = \int_0^c \frac{\ln(c + x)}{c^2 + x^2}\, dx$ යැයි ගනිමු. $x = c\tan\theta$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $I = \frac{\pi}{4c}\ln c + \frac{1}{c} J$ බව පෙන්වන්න.මෙහි $J = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan\theta)\, d\theta$ වේ.

a නියතයක් වන $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, $J = \frac{\pi}{8}\ln 2$ බව පෙන්වන්න.

$I = \frac{\pi}{8c}\ln(2c^2)$ බව අපෝහනය කරන්න.

2018

19. (a) (i) x^2, x^1 හා x^0 හි සංගුණකය සැසඳීමෙන්,
සියලු $x \in R$ සඳහා $Ax^2(x - 1) + Bx(x - 1) + C(x - 1) - Ax^3 = 1$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින් $\frac{1}{x^3(x - 1)}$ යන්න භින්න භාග වලින් ලියා දක්වා $\int \frac{1}{x^3(x - 1)}\, dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int x^2 \cos 2x\, dx$ සොයන්න.

(b) $\theta = \tan^{-1}(\cos x)$ ආදේශයන් භාවිතයෙන්, $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}\, dx = 2\ln(1 + \sqrt{2})$ බව පෙන්වන්න.

a නියතයක් වන $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්, $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}\, dx$ සොයන්න.

2019

20. (i) $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ සඳහා $x = 2\sin^2\theta + 3$ ආදේශය භාවිතයෙන්, $\int_3^4 \sqrt{\frac{x-3}{5-x}}\,dx$ අගයන්න.

(ii) භාන්න භාග භාවිතයෙන්, $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ සොයන්න.

$r > 2$ සඳහා $f(t) = \int_3^t \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ යැයි ගනිමු.

$r > 2$ සඳහා $f(t) = \text{In}\,(t-2) - \text{In}(t-1) + \text{In}\,2$ බව අපෝහනය කරන්න.

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\text{In}\,(x-k)\,dx$ සොයන්න. මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි.

ඒ නයින්, $\int f(t)\,dt$ සොයන්න.

(iii) a හා b නියත වන $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x \cos^2 x}{1+e^x}\,dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\,dx$ හි අගය සොයන්න.

2020

21. (i) සියලු $x \in R$ සඳහා $x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$
වන පරිදි A හා B නියත පවතින බවදී ඇත.
A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\frac{x^3 + 13x - 16}{(x+1)^2(x^2+9)}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා, $\int \frac{x^3 + 13x - 16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx$ සොයන්න.

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x\,dx$ අගයන්න.

(c) a නියතයක් වන $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x\,dx = \pi/2 \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x\,dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x\,dx = \frac{2\pi}{63}$ බව පෙන්වන්න.

2000

(01)

(අ) $I=\int_1^8 \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}dx$

$y=x^{\frac{1}{3}}$ ලෙස ගනිමු. එවිට $dy=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx$

(ලකුණු 05) (ලකුණු 05)

$x=1$ විට, $y=1$, $x=8$ විට, $y=2$

එවිට,

$I=3\int_1^2\frac{dy}{1+y^2}=\left[3\tan^{-1}y\right]_1^2=3\left[\tan^{-1}2-\tan^{-1}1\right]$

(ලකුණු 05) (ලකුණු 05) (ලකුණු 05)

$=3\left[\tan^{-1}2-\frac{\pi}{4}\right]$ **25**

(ආ) $I=\int_0^\pi e^{-2x}\cos x\,dx$

$=\int_0^\pi e^{-2x}\frac{d}{dx}(\sin x)dx$ (ලකුණු 05)

$=\left[e^{-2x}\cdot\sin x\right]_0^\pi+2\int_0^\pi \sin x\cdot e^{-2x}dx$ (ලකුණු 10) **15**

$=2J$

$J=\int_0^\pi e^{-2x}\sin x\ a$

$=\int_0^\pi e^{-2x}\frac{d}{dx}(-\cos x)dx$ (ලකුණු 05)

$=\left[-e^{-2x}\cos x\right]_0^\pi-2\int_0^\pi e^{-2x}\cos x\,dx$ (ලකුණු 10) **15**

$=e^{-2\pi}+1-2I$

$J=\frac{1}{5}\left(e^{-2\pi}+1\right)$ $I=\frac{2}{5}\left(e^{-2\pi}+1\right)$

(ලකුණු 05) (ලකුණු 05) **10**

(ඇ) $\frac{x^2-5x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}$ (ලකුණු 05)

මෙහි A, B, C නියත වේ.

∴ $A=-1$, $C=-3$ (ලකුණු 10)

$x=0$ විට, $B+1-3=0$ ⇒ $B=2$ (ලකුණු 05)

$\int\frac{x^2-5x}{(x-1)(x+1)^2}dx=\int\frac{dx}{(x-1)}+2\int\frac{dx}{x+1}-3\frac{dx}{(x+1)^2}$

$=-\ln|x-1|+2\ln|x+1|+\frac{3}{(x+1)}+D$

(ලකුණු 05) (ලකුණු 05) (ලකුණු 05) **35**

D යනු අභිමත නියතයකි.

2001

(02)

(අ) $I=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$ සහ $x=2\sin\theta$ ලෙස ගනිමු.

(ලකුණු 05)

එවිට $dx=2\cos\theta\,d\theta$

$x=1\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{2},\ \theta=\frac{\pi}{6}$ සහ

$x=\sqrt{2}\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \theta=\frac{\pi}{4}$ (ලකුණු 05)

එවිට

$I=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{2\cos\theta\,d\theta}{4\sin^2\theta\sqrt{4-4\sin^2\theta}}$

$=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\cos\theta\,d\theta}{4\sin^2\theta\cos\theta}$ (ලකුණු 05)

$=\frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\operatorname{cosec}^2\theta\,d\theta$ (ලකුණු 05)

$=-\frac{1}{4}(\cos\theta)_{\pi/6}^{\pi/4}$ (ලකුණු 05)

$=-\frac{1}{4}\left[\cot\frac{\pi}{4}-\cot\frac{\pi}{6}\right]$

$=-\frac{1}{4}\left[1-\sqrt{3}\right]$

$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$ (ලකුණු 05) **30**

(ආ) $\int_2^4 x\ln x\,dx$

$=\int_2^4\ln x\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2/2\right)dx$ (ලකුණු 05)

$=\left[(\ln x)\frac{x^2}{2}\right]_2^4-\int_2^4\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$ (ලකුණු 05)

$=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_2^4-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4$ (ලකුණු 05)

$=\frac{16}{2}\ln4-\frac{4}{2}\ln2-\frac{1}{2}\left[\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right]$ (ලකුණු 05)

$=8\ln4-2\ln2-3$ (ලකුණු 05)

$=2\ln(128)-3$ (ලකුණු 05) **30**

(ඇ) $\frac{7x-x^2}{(2-x)(x^2+1)} = \frac{A}{2-x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට, $7x - x^2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(2-x)$

$x = 2 \Rightarrow 14 - 4 = 5A \Rightarrow A = 2$

x^2 හි සංගුණකය සැසඳීමෙන් (ලකුණු 10)

$-1 = A - B \Rightarrow B = 3$

නියත සැසඳීමෙන් $0 = A + 2C \Rightarrow C = -1$

$$\int_0^1 \frac{7x-x^2}{(2-x)(x^2+1)}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{2-x}dx + \int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+1}dx$$ (ලකුණු 05)

$$= -2\left[\ln|2-x|\right]_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx - \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$

(ලකුණු 05)

$$= -2\left[\ln(1) - \ln(2)\right] + \frac{3}{2}\left[\log|x^2+1|\right]_0^1 - \left[\tan^{-1}x\right]_0^1$$

(ලකුණු 15)

$$= 2\ln(2) + \frac{3}{2}\left[\ln 2 - \ln 1\right] - \tan^{-1}(1-0)$$ (ලකුණු 05)

$$= \frac{7}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$$

40

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}$$

40

2002

(03) (a) $I = \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 1}}\, dx,\ u = \sqrt{x^2 - 1}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $u^2 = x^2 - 1$ (ලකුණු 05)

එවිට $2u\frac{du}{dx} = 2x$

$u\,du = x\,dx$ (ලකුණු 05)

එවිට, $I = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{u^2 + 1}{u}\right) u\, du$ (ලකුණු 05)

$= \int_0^{\sqrt{3}} \left(u^2 + 1\right) du$ (ලකුණු 05)

$= \left[\frac{u^3}{3} + u\right]_0^{\sqrt{3}}$ (ලකුණු 05)

$= \left[\frac{3\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - 0\right]$

$= 2\sqrt{3}$ (ලකුණු 05)

30

(b) $\int_0^1 x \tan^{-1} x\, dx$

$= \int_0^1 \tan^{-1}(x)\, \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$ (ලකුණු 05)

$$= \left[\tan^{-1}x \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2}dx$$ (ලකුණු 10)

$$= \left[\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}-0\right]_1^0 - \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{1+x^2}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right]dx$$ (ල. 05)

$$= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}[x]_0^1+\frac{1}{2}\left[\tan^{-1}x\right]_0^1$$ (ලකුණු 10)

$$= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$ (ලකුණු 05)

35

(c) $$\frac{5x-4}{(2+x)(1-x+x^2)} = \frac{A}{2+x}+\frac{Bx+C}{1-x+x^2}$$ (ලකුණු 05)

⇨ A = -2, B = 2, C = -1 (ලකුණු 10)

$$\int_1^2 \frac{5x-4}{(1-x+x^2)(2+x)}dx$$

$$= \int_1^2 \frac{2x-1}{1-x+x^2}dx - 2\int_1^2 \frac{dx}{x+2}$$ (ලකුණු 05)

$$= \left[\ln\left|1-x+x^2\right|\right]_1^2 - 2\left[\ln|x+2|\right]_1^2$$ (ලකුණු 10)

$$= (\ln 3-\ln 1)-2(\ln 4-\ln 3)$$

$$= 3\ln 3 - 2\ln 4$$ (ලකුණු 05)

$$= \ln\frac{27}{16}$$

35

$= 3\ell n3 - 2\ell n4$ (ලකුණු 05)

$= \ell n\dfrac{27}{16}$ **35**

2003

(04)

(a) $3\sqrt{x} = y^c$ ලෙස ගනිමු. එවිට

$x = y^3$ හා $dx = 3y^2\,dy$ (ලකුණු 10)

$$= \int_1^8 \frac{dx}{1 + x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \int_1^2 \frac{3y^2 dy}{1 + y}$$ (ලකුණු 05)

$$= 3\int_1^2 \left[(y-1) + \frac{1}{1+y}\right] dy$$

$$= 3\left[\frac{y^2}{2} - y + \ell n(1+y)\right]_1^2$$ (ලකුණු 10)

$$= 3\left[\ell n3 - \frac{1}{2} + 1 - \ell n2\right]$$

$$= 3\left[\frac{1}{2} + \ell n\frac{3}{2}\right]$$ (ලකුණු 05) **30**

(b) $\int_0^1 x^2 e^{2x+3}dx$

$$= e^3 \int_0^1 x^2 e^{2x} dx$$

$$= e^3 \int_0^1 x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)dx$$

$$= e^3 \left[\left(x^2 \frac{e^{2x}}{2}\right)_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}\cdot 2x dx\right]$$ (ලකුණු 10)

$$= e^3 \left[\frac{e^2}{2} - \int_0^1 x \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)dx\right]$$

$$= e^3 \left[\frac{e^2}{2} - \left(x\frac{e^{2x}}{2}\right)_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}dx\right]$$ (ලකුණු 15)

$$= e^3 \left[\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \left(\frac{e^{2x}}{4}\right)_0^1\right]$$ (ලකුණු 10)

$$= e^3 \left[\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right] = \frac{e^3}{4}\left(e^2 - 1\right)$$ (ලකුණු 05) **[40]**

(c) $\frac{1}{x(x^2+3)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}$ හා $C = 0$ (ලකුණු 10)

$$\therefore \int \frac{dx}{x(x^2+3)} = \int \frac{dx}{3x} - \int \frac{x}{3(x^2+3)}dx$$ (ලකුණු 05)

$$= \frac{1}{3}\left[(\ln|x|) - \frac{1}{2}\ln|x^2+3|\right] + D$$ (ලකුණු 10)

$$= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+3}}\right) + D$$ (ලකුණු 05) **[30]**

(c) $x(x^2+3)$ x x^2+3

$$\Rightarrow A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3} \text{ හා } C=0 \text{ (ලකුණු 10)}$$

$$\therefore \int\frac{dx}{x(x^2+3)}=\int\frac{dx}{3x}-\int\frac{x}{3(x^2+3)}dx \text{ (ලකුණු 05)}$$

$$=\frac{1}{3}\left[(\ell n|x|)-\frac{1}{2}\ell n|x^2+3|\right]+D \text{ (ලකුණු 10)}$$

$$=\frac{1}{3}\ell n\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+3}}\right)+D \text{ (ලකුණු 05)}$$

30

මෙහි D අභිමත නියතයකි.

2004

(05)

$$I=\int_{11}^{23}\frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+3}}dx$$

$t=\sqrt{2x+3}$ ලෙස ගනිමු. (ලකුණු 05)

එවිට $t^2=2x+3$ හා $2tdt=2dx$ වේ.

දැන්, $x+1=\frac{t^2-3}{2}+1=\frac{t^2-1}{2}$ හා (ලකුණු 05)

$x=11$ විට $t=5$ හා $x=23$ විට $t=7$ (ලකුණු 05)

එවිට, $I=\int_5^7\frac{2dt}{t^2-1}=\int_5^7\frac{2dt}{(t-1)(t+1)}$ (ලකුණු 05)

$$=2\int_5^7\left[\frac{\frac{1}{2}}{(t-1)}+\frac{-\frac{1}{2}}{t+1}\right]dt$$ (ලකුණු 05)

$$=\int_5^7\frac{dt}{t-1}-\int_5^7\frac{dt}{t+1}$$

$$=\left[\ln(t-1)\right]_5^7-\left[\ln(t+1)\right]_5^7$$ (ලකුණු 05)

$$=\ln\frac{6}{4}-\ln\frac{8}{6}$$ (ලකුණු 05)

$$=\ln=\frac{9}{8}$$

35

(b) $J=\int e^{3x}\cos\ 4x\ dx$

$$=\int e^{3x}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin 4x}{4}\right)dx$$ (ලකුණු 05)

$$=e^{3x}\frac{\sin 4x}{4}-\int\frac{\sin 4x}{4}\cdot\frac{d}{dx}\left(e^{3x}\right)dx$$

$$=e^{3x}\frac{\sin 4x}{4}-\int 3e^{3x}\ \frac{\sin 4x}{4}dx$$ (ලකුණු 05)

$$=\frac{e^{3x}}{4}\sin 4x-\frac{3}{4}\ \int e^{3x}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{-\cos 4x}{4}\right)dx$$ (ලකුණු 05)

$$= e^{3x}\frac{\sin 4x}{4} - \int 3e^{3x}\ \frac{\sin 4x}{4}dx$$ (ලකුණු 05)

$$= \frac{e^{3x}}{4}\sin 4x - \frac{3}{4}\ \int e^{3x}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{-\cos 4x}{4}\right)dx$$ (ලකුණු 05)

$$= \frac{1}{4}e^{3x}\sin 4x - \frac{3}{4}\left[\frac{-e^{3x}\cos 4x}{4}\right] - \frac{3}{4}\int \frac{\cos 4x}{4}\ \frac{d}{dx}\left(e^{3x}\right)dx$$

(ලකුණු 05)

$$= \frac{1}{4}e^{3x}\sin 4x + \frac{3}{16}e^{3x}\cos 4x - \frac{3}{16}\cos 4x \cdot 3e^{3x}dx$$

$$= \frac{1}{4}e^{3x}\sin 4x + \frac{3}{16}e^{3x}\cos 4x - \frac{6}{19}\int e^{3x}\cos 4x\ dx$$

$16J = 4e^{3x}\sin 4x + 3e^{3x}\cos 4x - 9J$ (ලකුණු 05)

$25\ J = e^{3x}\ [4\sin 4x + 3\cos 4x]$

$$J = \frac{e^{3x}}{25}[4\sin 4x + 3\cos 4x]$$ (ලකුණු 05)

$$\int e^{3x}\cos 4x dx = \frac{e^{3x}}{25}[4\sin 4x + 3\cos 4x] + C$$ (ලකුණු 05)

මෙහි C අභිමත නියතයකි.

35

(c) $$\int \sin^4 2x dx = \int\left[\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right]^2 dx$$ (ලකුණු 05)

$$= \frac{1}{4}\int\left(1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 4x+\frac{1}{2}(1+\cos 8x)\right)dx$$ (ලකුණු 05)

$$=\frac{1}{8}\int(3-4\cos 4x+\cos 8x)dx$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{4\sin 4x}{32}+\frac{\sin 8x}{64}+C$$ (ලකුණු 15)

මෙහි C අභිමත නියතයකි.

$$=\frac{3x}{8}-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x+C$$ (ලකුණු 05) **30**

2005

(06)

(a) $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{5+4\sin x}$$

$$t=\tan\frac{x}{2}$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$ (ලකුණු 05) $$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$$ (ලකුණු 05)

$$I=\int_0^1\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+4\cdot\frac{2t}{1+t^2}}$$ (ල. 05) $$=\int_0^1\frac{2dt}{5+5t^2+8t}$$ (ල. 05)

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ (ලකුණු 05) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ (ලකුණු 05)

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+4\cdot\frac{2t}{1+t^2}}$$ (ල. 05) $$= \int_0^1 \frac{2dt}{5+5t^2+8t}$$ (ල. 05)

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{5t^2+8t+5} = \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{2dt}{t^2+\frac{8}{5}t+1}$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+1-\frac{16}{25}}$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{25}}$$ (ලකුණු 05)

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}\left[\tan^{-1}\frac{\left(t+\frac{4}{5}\right)}{\frac{3}{5}}\right]_0$$ (ලකුණු 05)

$$= \frac{2}{3}\left[\tan^{-1} - \tan^{-1}\frac{4}{3}\right]$$ (ලකුණු 05)

35

$$I = \int_0^1 15x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$= 5\int_0^1 x^2\, d\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$ (ලකුණු 05)

$$= 5\left\{\left(x^2\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)_0^1 - \int_0^1 \left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot 2x\cdot dx\right\}$$

(ලකුණු 05) (ලකුණු 05)

$$= 5\left\{2\sqrt{2} - \frac{2}{5}\left(1+x^2\right)^{\frac{5}{2}}\right\}_0^1$$ (ලකුණු 10)

$$= 5\left\{2\sqrt{2} - \frac{1}{5}\times 8\sqrt{2} + \frac{2}{5}\right\}$$ (ලකුණු 05)

$$= 10\sqrt{2} - 8\sqrt{2} + 2$$

$$= 2\sqrt{2} + 2 = 2\left(\sqrt{2}+1\right)$$

30

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2-10x+13}{(x-2)^2(x-3)}dx$

$$\frac{x^2-10x+13}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-3)}$$ (ල. 05)

$x^2 - 10x + 13 = A(x-2)(x-3) + B(x-3) + C(x-2)^2$

$x = 2$ ආ. වි.

$4 - 20 + 13 = -B$

$-3 = -B$

$B = 3$ (ලකුණු 05)

$x = 3$ ආ. වි.

$9 - 30 + 13 = C$

$C = -8$

(ලකුණු 05)

$x = 0$ ආ. වි.

$13 = 6A - 9 - 32$

$6A = 13 + 41 = 54$

$A = 9$ (ලකුණු 05)

$$\therefore \int \frac{x^2-10x+13}{(x-2)^2(x-3)}dx = 9\int\frac{dx}{x-2} + 3\int\frac{dx}{(x-2)^2} - 8\int\frac{dx}{x-3}$$

$13 = 6A - 9 - 32$

$6A = 13 + 41 = 54$

$A = 9$ (ලකුණු 05)

$$\therefore \int \frac{x^2 - 10x + 13}{(x-2)^2 (x-3)} dx = 9 \int \frac{dx}{x-2} + 3 \int \frac{dx}{(x-2)^2} - 8 \int \frac{dx}{x-3}$$

(ලකුණු 05)

$$= 9 \ell g |x-2| - 3 \frac{1}{(x-2)} - 8 \ell g |x-3|$$ (ලකුණු 05)

$$= 9 \ell n |x-2| - 8 \ell n |x-3| - \frac{3}{(x-2)} + C$$ (ලකුණු 05) **35**

2006

(07)

(i) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2\cos x + \sin x}$ ලෙස ගනිමු.

$t = \tan \frac{x}{2}$ ලෙස ගත් විට, (ලකුණු 05)

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ සහ $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

(ලකුණු 05)

එවිට, $I = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}}$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{3\left(1+t^2\right)+2\left(1-t^2\right)+2t}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+2t+5}$$ (ලකුණු 10)

$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2+4}$$ (ලකුණු 05)

$$I = \left[\frac{2}{2}\tan^{-1}\left(\frac{t+1}{2}\right)\right]_0^1$$ (ලකුණු 05)

$$= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$ (ලකුණු 05)

35

(b) $I = \int e^{4x}\sin 3x\, dx$

කොටස් වශයෙන් අනුකලනයෙන්.

$$I = \frac{1}{4}\int \sin 3x \frac{d}{dx}\left(e^{4x}\right)dx$$ (ලකුණු 05)

$$= \frac{1}{4}e^{4x}\cdot\sin 3x - \frac{1}{4}\int e^{4x}3\cos 3x\, dx$$ (ලකුණු 05)

$$= \frac{1}{4}e^{4x}\sin 3x - \frac{3}{4}\int \cos 3x \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{4x}}{4}\right)dx$$ (ල. 05)

$$= \frac{1}{4}e^{4x}\sin 3x - \frac{3}{16}e^{4x}\cos 3x + \frac{3}{16}\int e^{4x}(-3\sin 3x)\,dx$$

(ලකුණු 05)

$$= \frac{1}{4}e^{4x}\sin 3x - \frac{3}{16}e^{4x}\cos 3x - \frac{9}{16}\int e^{4x}\sin 3x\, dx$$

$$=\frac{1}{4}e^{4x}\sin 3x-\frac{3}{4}\int\cos 3x\,\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{4x}}{4}\right)dx$$ (ල. 05)

$$=\frac{1}{4}e^{4x}\sin 3x-\frac{3}{16}e^{4x}\cos 3x+\frac{3}{16}\int e^{4x}(-3\sin 3x)\,dx$$

(ලකුණු 05)

$$=\frac{1}{4}e^{4x}\sin 3x-\frac{3}{16}e^{4x}\cos 3x-\frac{9}{16}\int e^{4x}\sin 3x\,dx$$

$$=\frac{e^{4x}}{16}(4\sin 3x-3\cos 3x)-\frac{9}{16}I$$ (ලකුණු 05)

$$I+\frac{9}{16}I=\frac{e^{4x}}{16}(4\sin 3x-3\cos 3x)$$

$$\frac{25}{16}I=\frac{e^{4x}}{16}(4\sin 3x-3\cos 3x)$$

$$I=\frac{e^{4x}}{25}(4\sin 3x-3\cos 3x)$$ (ලකුණු 05)

$$\therefore\ \int e^{4x}4\sin 3x\,dx=\frac{e^{4x}}{25}(4\sin 3x-3\cos 3x)+C$$ **30**

මෙහි C අභිමත නියතයකි.

(c) $\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+c}{x^2-x+1}$ ලෙස ගනිමු.

(ලකුණු 05)

එවිට $1=A(x^2-x+1)+(Bx+c)(x+1)$

එනම්, $1=(A+B)x^2+(B-A+C)x+(A+C)$

x^2, x හා x^0 හි සංගුණක සමාන කිරීමෙන්

$A+B=0,\quad B-A+C=0,\quad A+C=1$

සමීකරණ තුන විසඳීමෙන්.

2007

(08)

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = \frac{-1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}$$ (ලකුණු 10).

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{(x-2)}{x^2-x+1}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{\left(\frac{1}{2}(2x-1) - \frac{3}{2}\right)}{x^2-x+1}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{(x^2-x+1)}\right]$$

$$\int\frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)dx}{(x^2-x+1)} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left|(x^2-x+1)\right| + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$ (ල 05)

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\cdot\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left[\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right] + C$$

(ලකුණු 05) (ලකුණු 05) (ලකුණු 05)

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{(2x-1)}{\sqrt{3}} + C$$

මෙහි C අභිමත නියතයකි.

35

මෙහි C අභිමත නියතයකි. **35**

2007

(08) (a) $$\frac{x^3+1}{x(x-1)^5} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

(ලකුණු 05)

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx$$

$x = 0$ විට $A = -1$

$x = 1$ විට $D = 2$

$x = 2$ විට $9 = A + 2B + 2C + 2D$

$\Rightarrow B + C = 3 \quad \rightarrow (1)$

$x = -1$ විට $0 = -8A - 4B + 2C - D$

$\Rightarrow 2B - C = 3 \quad \rightarrow (2)$

(1) හා (2) න් $B = 2$, $C = 1$ වේ. (ලකුණු 10)

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx = -\int\frac{dx}{x} + 2\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int\frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$$

(ලකුණු 10) (ලකුණු 05)

C අභිමත නියතයකි. **30**

(b) $25\cos x + 15 \equiv A(3\cos x + 4\sin x + 5) + B(-3\sin x + 4\cos x) + C$, $\cos x$ හි සංගුණය සමාන කිරීමෙන්,

$3A + 4B = 25 \rightarrow (1)$ (ලකුණු 05)

$\sin x$ හි සංගුණය සැසඳීමෙන්

$4A - 3B = 0 \rightarrow (1)$

නියත පද සැසඳීමෙන් $C = 0$

(1) හා (2) න් $A = 3,\ B = 4$ (ලකුණු 10)

$$\int \frac{25\cos x + 15}{3\cos x + 4\sin x + 5}dx = 3\int dx + 4\int \frac{3\sin x + 4\cos x}{(3\cos x + 4\sin x + 5)}dx$$

$$= 3x + 4ln\left|3\cos x + 4\sin x + 5\right| + C$$

මෙහි C අභිමත නියතයකි. (ලකුණු 10)

(c) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, d(-\cos x)$$

$$= \left[-\cos x \cdot \sin^5 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos^2 x\, dx$$ (ලකුණු 05)

$$= 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx - 5\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$$ (ලකුණු 05)

$$=5\int_{0}\sin x\,dx-5\int_{0}\sin x\,dx \quad (\text{ලකුණු } 05)$$

$$\int\sin^{6}x\,dx=\frac{5}{6}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4}x\,dx$$

$$\int\sin^{6}x\,dx=\frac{5}{6}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4}x\,dx$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4}x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{3}x\cdot d(-\cos x)$$

$$=\left[-\cos x\sin^{3}x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2}x\cos^{2}x\,dx \quad (\text{ලකුණු } 05)$$

$$=3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2}x\,dx-3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4}x\,dx \quad (\text{ලකුණු } 05)$$

$$4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4}x\,dx=3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2}x\,dx$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{4}x\,dx=\frac{3}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2}x\,dx$$

$$\therefore\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{6}x\,dx=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2}x\,dx$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2}x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,d(-\cos x)$$

$$=\left[-\sin x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 x\right) dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{4}$$ (ලකුණු 05)

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{32}$$ (ලකුණු 05) **30**

$y = 3x$ ලෙස ගනිමු. එවිට $dy = 3dx$ හා $x = 0$ විට $y = 0$

$x = \frac{\pi}{6}$ විට $y = \frac{\pi}{2}$ වේ. (ලකුණු 05)

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^6 3x\, dx = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 y\, dy = \frac{1}{3} \times \frac{5\pi}{32}$$ (ල.05)

$$=\frac{5\pi}{96}$$ (ලකුණු 05)

15

Scanned with CamScanner

2008

(09) (a) $$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)}-\frac{1}{(x+a)}\right] a\neq 0$$

(ලකුණු 05)

$$\therefore \frac{1}{\left(x^2-a^2\right)^2}=\frac{1}{4a^2}\left[\frac{1}{(x-a)^2}-\frac{2}{(x-a)(x+a)}+\frac{1}{(x+a)^2}\right]$$

(ලකුණු 05)

$$=\frac{1}{4a^2}\frac{1}{(x-a)^2}-\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{x^2-a^2}\right)+\frac{1}{4a^2}\left(\frac{1}{(x+a)^2}\right)$$

(ලකුණු 05)

$$=\frac{1}{4a^2}\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{1}{4a^2}\frac{1}{(x+a)^2}-\frac{1}{4a^3}\cdot\frac{1}{(x-a)}+\frac{1}{4a^3}\cdot\frac{1}{(x+a)}$$

(ලකුණු 05)

20

තවත් ක්‍රමයක් :-

$$\frac{1}{\left(x^2-a^2\right)^2}=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{(x+a)}+\frac{D}{(x+a)^2}$$

(ලකුණු 05)

$$1=A(x+a)^2(x-a)+B(x+a)^2+C(x-a)^2(x+a)+D(x-a)^2$$

(ලකුණු 05)

$$1=(A+C)x^3+[a(A-C)+(B+D)]x^2+[2a(B-D)-a^2(A+C)]x+a^3(C-A)+a^2(B+D)$$

$\Rightarrow \quad A + C = 0 \rightarrow (01)$

$a(A - C) + (B + D) = 0 \rightarrow (02)$

$2(B - D) = a(A + C) \rightarrow (03)$

$B + D = \frac{1}{a^2} + a(A - C) \rightarrow (04)$ (ලකුණු 05)

$\Rightarrow B = D, \quad B = aC, \quad C = \frac{1}{4a^2}$ (ලකුණු 05) **20**

$A = -C, \quad a \neq 0$

එබැවින්,

$$\frac{1}{(x^2 - a^2)^2} = -\frac{1}{4a^3}\frac{1}{(x-a)} + \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{4a^3}\cdot\frac{1}{(x+a)}$$

$$+\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{1}{(x-a)^2}$$

දැන්

$$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^2} = \begin{cases} \frac{1}{4a^2}\int\frac{dx}{(x-a)^2} + \frac{1}{4a^2}\int\frac{dx}{(x+a)^2} - \frac{1}{4a^3} \\ \int\frac{dx}{(x-a)} + \frac{1}{4a^3}\int\frac{dx}{(x+a)} \end{cases},$$

(ලකුණු 05)

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4a^2}\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{1}{(x+a)} - \frac{1}{4a^3} \\ \ln|x-a| + \frac{1}{4a^3}\ln|x+a| + C \end{pmatrix}$$ (ලකුණු 20)

= මෙහි C නියතයකි.

$$= \frac{-1}{4a^2}\left[\frac{1}{(x-a)} + \frac{1}{x+a}\right] + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$ **25**

$$-\frac{1}{4a^2}\left[\frac{1}{(x-a)}+\frac{1}{x+a}\right]+\frac{1}{4a^3}\ln|x-a|+C$$ 25

(b) (i) $y = 2^x \ (>0)$

$\ln y = x \ln 2$ (ලකුණු 05)

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln 2$$ (ලකුණු 05)

$$\frac{dy}{dx} = y(\ln 2)$$ (ලකුණු 05)

$$\frac{d}{dx}\left(2^x\right) = y(\ln 2)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) = y$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{2^x}{\ln 2}\right) = 2^x \rightarrow (A)$$ 15

(ii) (A) න්

$$\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$ (ලකුණු 10)

C නියතයකි.

(iii) $\int_{-1}^{1} 2^{\sqrt{x+1}}\, dx = I$

$t = \sqrt{x+1}$ (ලකුණු 05) $=$ $x = -1$ විට, $x = 1$ විට

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\left((x+1)^{\frac{-1}{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2t}$$

$dt = \dfrac{dx}{2t}$ (ලකුණු 05)

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} 2t \, . \, dt \, . \, 2^t = 2\int_0^{\sqrt{2}} t \, . \, 2^t \, dt$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2}} t \, . \, \frac{d}{dt}\left(\frac{2^t}{\ln 2}\right)$$

$$I = 2\left[\left(t \, . \, \frac{2^t}{\ln 2}\right)_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2^t}{\ln 2} dt\right]$$ (ලකුණු 05)

$$= 2\left[\frac{t \, . 2^t}{\ln 2}\right]_0^{\sqrt{2}} - \left(\frac{2}{\ln 2} \, . \, \frac{2^t}{\ln 2}\right)_0^{\sqrt{2}}$$ (ලකුණු 05)

$$I = 2\left[\left(t \cdot \frac{2^t}{\ln 2}\right)_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2^t}{\ln 2} dt\right]$$ (ලකුණු 05)

$$= 2\left[\frac{t \cdot 2^t}{\ln 2}\right]_0^{\sqrt{2}} - \left(\frac{2}{\ln 2} \cdot \frac{2^t}{\ln 2}\right)_0^{\sqrt{2}}$$ (ලකුණු 05)

$$= \left(\frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{\sqrt{2}}}{\ln 2}\right) - \frac{2 \cdot 2^{\sqrt{2}}}{(\ln 2)^2} + \frac{2}{(\ln 2)^2}$$

$$I = 2^{\sqrt{2}+1}\left[\frac{\sqrt{2}}{\ln 2} - \frac{1}{(\ln 2)^2}\right] + \frac{2}{(\ln 2)^2}$$ (ලකුණු 05) **30**

2009

(10) $I_k = \int \frac{e^t}{t^k} dt$, $t > 0$ වන අතර k ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවකි.

එවිට,

$$I_k = \int \frac{e^t}{t^k} dt = \int \frac{(-1)}{(k-1)} e^k \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^{k-1}}\right) dt \quad k \neq 1$$ (ලකුණු 10)

$$= -\frac{1}{k-1} \frac{e^k}{t^{k-1}} + \frac{1}{k-1} \int \frac{e^t}{t^{k-1}} dt$$

$$I_k - I_{k-1} + \frac{1}{k-1} \frac{e^k}{t^{k-1}} =$$ නියතයක් (c) →(01)

(ලකුණු 10)

20

$$I = \int e^{x}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 dx$$

$t = 1 + x$ යයි ගනිමු. (ලකුණු 05)

$dt = dx$

$$I = \int e^{t-1}\frac{(2-t)^2}{t^2}dt$$ (ලකුණු 10)

$$= \frac{1}{e}\int e^{t}\left\{\frac{4}{t^2} - \frac{4}{t} + 1\right\}dt$$ (ලකුණු 05)

$$I_k = \int \frac{e^t}{t^k}dt, \quad I = \frac{1}{e}\left\{4I_2 - 4I_1 + \int e^t dt\right\}$$

(01) න් k = 2 විට,

$$I_2 - I_1 = \text{නියතය} - \frac{e^t}{t}$$ (ලකුණු 05)

$$I = \frac{1}{e}\left\{\text{නියතය} - \frac{4e^t}{t} + \int e^t dt\right\}$$

$$= \frac{1}{e}\left\{\text{නියතය} - \frac{4e^t}{t} + e^t\right\}$$ (ලකුණු 05)

$$= \frac{e^{1+x}}{e} - \frac{4e^{1+x}}{e(1+x)} + \text{නියතය}$$

30

$$= \frac{e^{1+x}}{e} - \frac{4e^{1+x}}{e(1+x)} + \text{නියතය}$$ 30

(b) $J = \int_0^a f(x)\,dx$ මෙහි $a > 0$

$y = a - x$ (ලකුණු 05) එවිට $dy = -dx$ (ලකුණු 05)

$$J = -\int_a^0 f(a-x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx \rightarrow (01)$$ (ලකුණු 10)

20

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k} x\,dx$$

k ධන පූර්ණ වේ. (ලකුණු 10)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x}\,dx$$ (ල. 10)

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2k} x}{\sin^{2k} x + \cos^{2k} x}\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{4}$$ (ලකුණු 10)

30

2010

(11)

$$(a)\ \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2} \equiv \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{C}{1+x} + \frac{D}{(1+x)^2}$$

(ලකුණු 05)

$$2x = (Ax+B)(1+x)^2 + C(1+x)(1+x^2) + D(1+x^2)$$

$$2x = \begin{pmatrix} (A+C)x^3 + (2A+B+C+D)x^2 + \\ (A+2B+C)x + (B+C+D) \end{pmatrix}$$

අනුරූප පදවල සංගුණක සැසඳීමෙන්,

$A + C = 0, 2A + B + C + D = 0, \ A + 2B + C = 2$ හා

$B + C + D = 0$ වේ.

ඉහත සමීකරණ කුලකය විසඳීමෙන් $A = C = 0, B = 1$ සහ

(ල. 05) (ල. 05) (ල. 05)

$D = -1$ ලැබේ.

(ලකුණු 05)

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2}dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{(1+x)^2} = \tan^{-1}x + \frac{1}{1+x} + k$$

(ල. 05) (ල. 05) (ල. 05)

මෙහි k යනු අභිමත නියතයකි.

40

(ලකුණු 05)

$$\left(b \int e^{ax}\cos bx\, dx = e^{ax}\sin bx - a\right.$$

30

ු 05)

ලකුණු 10)

20

$x\,dx$

ලකුණු 10)

dx (ල. 10)

30

(ලකුණු 05)

(b) (i) $bI = \left(\begin{array}{l} b\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\sin bx - a \\ \int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\sin bx - aJ \end{array} \right)$ (ලකුණු 05)

$$bI + aJ = e^{ax}\sin bx \rightarrow (01)$$

10

(ලකුණු 05)

(ii) $-bJ = \left(\begin{array}{l} -b\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\cos bx - a \\ \int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}\cos bx - aI \end{array} \right)$

(ලකුණු 05)

$$aI - bJ = e^{ax}\cos bx \rightarrow (02)$$

10

$$b \times (1) + a \times (2) \Rightarrow (a^2 + b^2)\,I = e^{ax}\,(b\sin bx + a\cos bx)$$

$$I = \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)}(b\sin bx + a\cos bx)$$ (ලකුණු 05)

05

$$a \times 1 - b \times 2 \Rightarrow (a^2 + b^2)\,J = e^{ax}\,(a\sin bx - b\cos bx)$$

$$J = \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)}(a\sin bx - b\cos bx)$$ (ලකුණු 05)

05

(c) $x^3 t + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -\frac{1}{t}$

$$3x^2 t + x^3\frac{dt}{dx} = 0$$ (ලකුණු 05)

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{3t}$$

$\Rightarrow x = 1$ විට $t = 1$ හා $x = -\dfrac{1}{2}$ විට $t = 8$ වේ. (ලකුණු 05)

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{x(x^3-1)} = \int_1^8 \frac{-\frac{dt}{3t}}{\left(\frac{-1}{t}-1\right)} = \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{dt}{1+t} = \frac{1}{3}\Big[\ell n|1+t|\Big]_1^8$$

(ලකුණු 05) (ලකුණු 05) (ලකුණු 05)

$$= \frac{1}{3}(\ell n 9 - \ell n 2) = \frac{1}{3}\ell n\frac{9}{2}$$

(ලකුණු 05)

30

2011

(12) (a)

$$\int_1^e x^{\frac{3}{2}} \ell n\, x dx = \int_1^e \ell n\, x\ d\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right) dx \quad (10)$$

$$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\ell n x\right]_1^e - \frac{2}{5}\int_1^e x^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5)\ (5)$$

$$= \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}\int_1^e x^{\frac{3}{2}} dx \quad (5) \quad \therefore \ell ne = 1 \text{ හා } \ell n 1 = 0$$

$$= \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{2}{5}\right)^2\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_1^e \quad (5)$$

$$= \frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 e^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 \quad (5)$$

35

$$=\frac{2}{5}e^{\frac{5}{2}}-\left(\frac{2}{5}\right)^2 e^{\frac{5}{2}}+\left(\frac{2}{5}\right)^2 \text{⑤}$$

35

(*b*)

$$\cos 2x-\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ \text{⑤}$$

$$\sin 2x=2\cos x\sin x=\frac{2\cos x\sin x}{\cos^2 x+\sin^2 x}$$

$$=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{2t}{1+t^2}\ \text{⑤}$$

$$t=\tan x\Rightarrow\frac{dt}{dx}=\sec^2 x=1+\tan^2 x=1+t^2$$

එබැවින්, $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$ වේ. ⑤

15

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\cos 2x+3\sin 2x+5}\,dx\ \text{⑤}=\int_0^1\frac{1}{4\left(1-t^2\right)+6t+5}\,dt\ \text{⑤}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{t^2+6t+9}\,dt\ \text{⑤}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(t+3)^2}\,dt\ \text{⑤}$$

$$= \left[-\frac{1}{(t+3)} \right]_0^1 \quad (5)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{12} \quad (5)$$

30

(c) $$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)}$$

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{(A+B)x-(Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)}$$

$$1 = (A+B)x-(Ab+Ba)$$

((x)) සමාන කිරීමෙන්, $A + B = 0 \rightarrow (01)$

නියත පද සමාන කිරීමෙන්. $Ab + Ba = -1 \rightarrow (02)$

(01) හා (02) මගින් $A = \frac{1}{a-b}$ හා $B = \frac{1}{b-a}$

(5) (5)

10

එබැවින්

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{(a-b)(x-a)} + \frac{1}{(b-a)(x-b)} \rightarrow (A)$$

(A) හි x, a හා b පිළිවෙලින් x^2, $-a^2$ හා $-b^2$ මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්,

(5) (5) (5)

(A) හි x, a හා b පිළිවෙලින් x^2, $-a^2$ හා $-b^2$ මගින් ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන්. (5) (5) (5)

35

$$\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)}=\frac{1}{\left(-a^2+b^2\right)\left(x^2-a^2\right)}-\frac{1}{\left(-a^2+b^2\right)\left(x^2+b^2\right)}$$

ලැබේ. (10)

$$\therefore \int\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2-b^2\right)}dx$$

$$=-\frac{1}{\left(b^2-a^2\right)}\int\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)}dx-\frac{1}{\left(b^2-a^2\right)}\int\frac{1}{x^2+b^2}dx \quad (5)$$

$$=\frac{1}{\left(b^2-a^2\right)}\left\{\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{b}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)\right\}+C$$

(10) (10) (5)

$a,b\neq 0$ නම්. මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

$a=0$ නම් $b\neq 0$ වේ.

$$\therefore \int\frac{1}{x^2\left(x^2+b^2\right)}dx=\frac{1}{b^2}\int\frac{1}{x^2}dx-\frac{1}{b^2}\int\frac{1}{\left(x^2+b^2\right)}dx$$

5

$$=-\frac{1}{b^2x}-\frac{1}{b^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)+C'$$

මෙහි C' යනු අභිමත නියතයකි.

If $b=0$ then $a\neq 0$

$$\therefore \int\frac{1}{x^2\left(x^2+b^2\right)}dx=-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)}dx+\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{x^2}dx$$

(5)

$$=-\frac{1}{a^2x}-\frac{1}{a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C''$$

මෙහි C' යනු අභිමත නියතයකි. 60

2012

(13)

(a) $\int_0^{\pi}\left(\sin^3 x-\cos^3 x\right)dx$

$=\int_0^{\pi}\left\{\left(1-\cos^2 x\right)\sin x-\left(1-\sin^2 x\right)\cos x\right\}dx$ (05)

$=\int_0^{\pi}\left(\sin x-\cos^2 x\sin x-\cos x+\sin^2 x\cos x\right)dx$

$=\left[-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}-\sin x+\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\pi}$ (05) (05) (05) (05)

$=2-\frac{2}{3}$

$=\frac{4}{3}$ (05)

30

වෙනත් ක්‍රමයක්

(a) $\int_0^{\pi}\left(\sin^3 x-\cos^3 x\right)dx$

$=\int_0^{\pi}\left\{\left(\sin x-\cos x\right)\left(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x\right)\right\}dx$

$=\int_0^{\pi}\left(\sin x-\cos x\right)\left(1+\sin x\cos x\right)dx$

$=\int_0^{\pi}\left(\sin x+\sin^2 x\cos x-\cos x-\cos^2 x\sin x\right)dx$ (05)

$=\left[-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}-\sin x+\frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\pi}$ (05) (05) (05) (05)

$=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ (05)

30

$$\left[\ldots\right]_0$$ (05) (05) (05) (05)

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$ (05)

30

(b) $\int x^3 \tan^{-1} x\,dx$

$$= \frac{x^4}{4}\tan^{-1}x - \frac{1}{4}\int \frac{x^4}{1+x^4}dx$$ (05)

$$= \frac{x^4}{4}\tan^{-1}x - \frac{1}{4}\int \frac{\left(x^2+1\right)^2 - \left(2x^2+1\right)}{1+x^2}dx$$ (05) (10)

$$= \frac{x^4}{4}\tan^{-1}x - \frac{1}{4}\int\left(x^2+1\right)dx + \frac{1}{4}\int \frac{2\left(x^2+1\right)-1}{1+x^2}dx$$ (05) (05)

$$= \frac{x^4}{4}\tan^{-1}x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}+x\right) + \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{1+x^2}$$ (05) (05)

$$= \frac{x^4}{4}\tan^{-1}x - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}+x\right) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\tan^{-1}x + C;$$ (10)

50

මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

(c) $$\frac{2x^2-3}{(x-2)^2\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$ (05) (05) (05)

මෙහි A, B, C හා D යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

$2x^2 - 3 = A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)^2$

$x = 2$ ගැනීමෙන් $B = 1$ ලැබේ. (05)

නියත පද සැසඳීමෙන් $-3 = -2A + B + 4D$ ලැබෙයි. (10)

x^3 පදයෙහි සංගුණක සැසඳීමෙන් $0 = A + C$ ලැබෙයි.

x පදයෙහි සංගුණක සැසඳීමෙන්.) $0 = A + 4C - 4D$ ලැබෙයි.

$-3 = -2A + B + 4D$ හි $B = 1$ යැයි යෙදීමෙන්

$-2 = -A + 2D \rightarrow$ (1) ලැබෙයි.

$0 = A + 4C - 4D$ හි $C = -A$ යැයි යෙදීමෙන්

$0 = 3A + 4D \rightarrow$ (2) ලැබෙයි.

(1) හා (2) න් $D = -\frac{3}{5}$ (05) හා $A = +\frac{4}{5}$ (05) යයි ලැබෙයි.

$C = -\frac{4}{5}$ (05)

$$\int \frac{2x^2 - 3}{(x-2)^2 (x^2+1)} dx$$

$$= \int \frac{4}{5(x-2)} dx + \int \frac{1}{(x-2)^2} dx - \int \frac{4x+3}{5(x^2+1)} dx$$

$$= \frac{4}{5} \ln|x-2| \text{ (05)} - \frac{1}{x-2} \text{ (05)} - \frac{2}{5} \int \frac{2x}{x^2+1} - \frac{3}{5} \int \frac{dx}{x^2+1} \text{ (05)}$$

$$= \frac{4}{5} \ell n|x-2| - \frac{1}{x-2} - \frac{2}{5} \ell n|x^2+1| - \frac{3}{5} \tan^{-1} x + k \text{ (10)}$$

මෙහි k යනු අභිමත නියතයකි. **70**

2013

(14) (a) $\int x^2 \sin^{-1} x \, dx = \int \sin^{-1} x \, \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) dx$ (05)

... යනු අභිමත නියතයකි. **70**

2013

(14) (a) $\int x^2 \sin^{-1} x \, dx = \int \sin^{-1} x \; d\left(\frac{x^3}{3}\right) dx$ (05)

$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x - \frac{1}{3}\int x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ (05) (10)

$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x + \frac{1}{3}\int x^2 d\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ (10)

$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x + \frac{1}{3}\left[x^2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}\int \sqrt{1-x^2}\, 2x\,dx\right]$ (05) (05)

$= \frac{x^3}{3}\sin^{-1} x + \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{9}\left(1-x^2\right)^{3/2} + c$ (05) (05)

C යනු අභිමත නියතයකි. **50**

(b) $\frac{x^2+3x+4}{(x^2-1)(x+1)^2} = \frac{x^2+3x+4}{(x-1)(x+1)^3}$ (05)

$\frac{x^2+3x+4}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$ (10)

$x^2+3x+4 = A(x+1)^3 + B(x-1)(x+1)^2 + C(x+1)(x-1) + D(x-1)$

$x = 1, \quad 1+3+4 = 8A \Rightarrow A = 1$
$x = -1 \quad 1-3+4 = -2D \Rightarrow D = -1$ (10)

x^3 හි සංගුණක සැසඳීමෙන්, $0 = A + B \Rightarrow B = -A = -1$
x^2 හි සංගුණක සැසඳීමෙන්, $1 = 3A - B + 2B + C \Rightarrow C = -1$ (10)

$\therefore \frac{x^2+3x+4}{(x^2-1)(x+1)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$

$$\int \frac{x^2+3x+4}{(x^2-1)(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int\frac{1}{x-1}dx - \int\frac{1}{x+1}dx - \int\frac{1}{(x+1)^2}dx - \int\frac{1}{(x+1)^3}dx \quad (05)$$

$$= \ell n|x-1| - \ell n|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + C \quad (05)$$

(05) (05) (05)

50

(c)

$$aI + bJ = \left(\int_0^{\pi/2} \frac{a^2+b^2+a\cos x+b\sin x}{a^2+b^2+a\cos x+b\sin x}\,dx \right) \quad (05)$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow (01) \quad (05)$$

(05)

$$bI - aJ = \int_0^{\pi/2} \frac{ab+b\cos x-ab-a\sin x}{a^2+b^2+a\cos x+b\sin x}\,dx \rightarrow (02) \quad (05)$$

$$= \ell n\left(a^2+b^2+a\cos x+b\sin x\right)\Big|_0^{\pi/2} \quad (10)$$

$$= \ell n\left(a^2+b^2+b\right) - \ell n\left(a^2+b^2+a\right) \quad (10)$$

$$= \ell n\left(\frac{a^2+b^2+b}{a^2+b^2+a}\right)$$

$$(01)\times a + (02)\times b \Rightarrow I = \frac{1}{a^2+b^2}\left\{\frac{a\pi}{2} + b\ell n\left(\frac{a^2+b^2+b}{a^2+b^2+a}\right)\right\} \quad (05)$$

$$J = \frac{1}{a^2+b^2}\left\{\frac{b\pi}{2} - a\ell n\left(\frac{a^2+b^2+b}{a^2+b^2+a}\right)\right\} \quad (05)$$

50

2014

(15) (a) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx$

$= \int \frac{3(x+1)-1}{x^2+2x+5}dx$ (05)

$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx$ (05)

$= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$ (05) (05) (05)

මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

$\because x^2+2x+5>0$ බව හඳුනාගන්න. **25**

(b)

$I = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x)dx$

$= \int_1^{e^\pi} \cos \ln(x)\frac{dx}{dx}\,dx$ (05)

$= x\cos \ln \Big|_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx$ (05) (05)

$= e^\pi \cos(\ln e^\pi) - \cos(\ln 1) + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\frac{dx}{dx}dx$ (05) (05)

$= e^\pi \cos\pi - \cos o + [x\sin(\ln x)]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx$ (05) (05) (05)

$= -e^\pi - 1 - e^\pi \sin\pi - \sin(\ln 1) - I$ (05)

$2I = -e^\pi - 1$

$I = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$ (05)

50

(c) $u = a - x$ යැයි ගනිමු. එවිට $x = a - u$ හා $\frac{dx}{du} = -1$

$\Rightarrow \frac{dx}{du} = -1 \Rightarrow dx = -du$ වේ. $x = a$ විට (05)

$u = 0$ ද $x = 0$ විට $u = a$ ද වේ.

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_a^0 f(a-u)(-du) = \int_0^a (a-u)\,du = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

(05) (05)

[15]

$$P(x) = (x-\pi)(2x+\pi)$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{Sin^2 x}{P(x)}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{Sin^2\left(\pi/2 - x\right)}{P\left(\pi/2 - x\right)}\,dx$$ (05)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{P\left(\pi/2 - x\right)}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{P(x)}\,dx$$ (05)

$$P\left(\pi/2 - x\right) = \left(\pi/2 - x - \pi\right)\left[2\left(\pi/2 - x\right) + \pi\right]$$

$$= -\frac{1}{2}(2x+\pi).2(\pi - x) = (x-\pi)(2x+\pi)$$ (10)

$$= P(x)$$

[20]

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{Sin^2 x}{P(x)}\,dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{P(x)}\,dx$$ (05)

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{Sin^2 x + \cos^2 x}{P(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{P(x)}\,dx$$ (05)

[10]

05 10

$$I = \frac{1}{2}\int^{\pi/2} \frac{1}{(x-\pi)(2x+\pi)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int^{\pi/2}\left[\frac{\frac{1}{3\pi}}{x-\pi} - \frac{\frac{2}{3\pi}}{2x+\pi}\right]dx$$ (05) (05)

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3\pi}\ln|x-\pi| - \frac{2}{3\pi}\times\frac{1}{2}\ln|2x+\pi|\ \right]^{\pi/2}\right\}$$ (05) (05)

$$= \frac{1}{6\pi}\left\{\ln|-\pi/2| - \ln|-\pi| - \ln|2\pi| + \ln|x|\right\}$$

(05)

$$I = \frac{1}{6\pi}\left(\ln\pi/2 - \ln 2\pi\right)$$

$$= \frac{1}{6\pi}\ln\left|\frac{\pi/2}{2\pi}\right| = \frac{1}{6\pi}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$$ (05)

30

2015

(16)

$y = \pi - x$ යැයි ගනිමු.

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \int_{\pi}^{0} f(\pi-y)\,(-dy) = \int_0^{\pi} f(\pi-y)\,dy = \int_0^{\pi} f(\pi-x)\,dx$$ (05) (05)

10

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2} - 0 = \pi/4,$$ (05) (05)

$$\because\ [\sin 2x]_0^{\pi/2} = 0$$

10

පළමු ප්‍රතිඵලය යෙදීමෙන්,

$$\int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin^2 (\pi - x) \, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - \int_0^{\pi} x\sin^2 x \, dx \quad (05)$$

$$\therefore 2\int_0^{\pi} x\sin^2 x \, dx = \pi \left[\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x \, dx \right] \quad (05)$$

$$= \pi \left[\pi/4 + J \right] \quad (05) \quad \text{මෙහි } J = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

$\pi - x = y$ ආදේශයෙන්, (05)

$$J = \int_{\pi/2}^{0} \sin^2 (\pi - y)(-dy) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 y \, dy = \pi/4 \quad (05)$$

$$\int_0^{\pi} x\sin^2 x \, dx = \pi/2 \left[\pi/4 + \pi/4 \right] = \frac{1}{2}(\pi \, . \, \pi/2) = \frac{\pi^2}{4}. \quad (05)$$

30

(b) ආදේශය

$t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$ (05)

$$\therefore \int x^3 e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int t \, . \, e^t \, dt \quad (05)$$

$$= \frac{1}{2} \int t \frac{d}{dt}(e^t) \, dt = \frac{1}{2} te^t - 1/2 \int e^t \, dt \quad (05)$$

$$= \frac{1}{2} te^t - \frac{1}{2} e^t + c \quad (05)$$ ආදේශය $t = x^2$, $\int x^3 e^{x^2} \, dx$

$= \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + c$

(05) (05)

30

(c) $\frac{1}{x^3 - 1} \equiv \frac{A}{x - 1} + \frac{BX + C}{x^2 + x + 1}$

$1 \equiv A(x^2 + x + 1) + (x - 1)(Bx + C)$

x^0 හි සංගුණක සමාන කිරීමෙන්, $1 = A - C$

x^1 හි සංගුණක සමාන කිරීමෙන්, $0 = A + C - B$

x^2 හි සංගුණක සමාන කිරීමෙන්, $0 = A + B$

$A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{-2}{3}$

(05) (05) (05)

15

$\int \frac{dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{3} \int \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} dx$ (05)

$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x - 1} - \frac{1}{3} \int \frac{\frac{1}{2}(2x + 1) + \frac{3}{2}}{x^2 + x + 1} dx$ (05)

$= \frac{1}{3} ln|x - 1| - \frac{1}{6} ln|x^2 + x + 1| - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x + 1/2)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ (05)

(05) (05)

$= \frac{1}{3} ln|x - 1| - \frac{1}{6} ln|x^2 + x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$

(05) (05)

35

(d) ආදේශය $t = \tan(x/2) \Rightarrow dt = \frac{1}{2}(1+t^2)\,dx$

$$\Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad ⑤$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+4\cos x+3\sin x} = \int_0^1 \frac{\frac{2}{(1+t^2)}\,dt}{5+4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+3\cdot\frac{2t}{1+t^2}} \quad ⑤$$

$$= \int_0^1 \frac{2\,dt}{5(1+t^2)+4(1-t^2)+6t}$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{t^2+6t+9} \quad ⑤$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{(t+3)^2} = 2\left[\frac{-1}{t+3}\right]_0^1 = 2\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]$$

⑤

$$= \frac{1}{6}$$

20

2016

(17) (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c_1$$ මෙහි c_1 අභිමත නියතයකි.

(ii) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right) = \frac{1}{2}(3+2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}(2-2x)$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

Scanned with CamScanner

(17) (i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c_1$$ මෙහි c_1 අභිමත නියතයකි.

(ii) $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right) = \frac{1}{2}(3+2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}(2-2x)$$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

එබැවින් $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx = -\sqrt{3+2x-x^2} + c_2$ මෙහි c_2 අභිමත නියතයකි.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$$

$$= -\sqrt{3+2x-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c_3$$ මෙහි c_3 අභිමත නියතයකි.

(b) $$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+c}{x^2+1}$$

$$2x-1 = A(x^2+1) + (Bx+c)(x+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2:\ 0 = A+B \\ x\ :\ 2 = B+C \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A-C = -2$$

$$x^0: -1 = A+C \qquad A = -3/2$$

$$C = 1/2$$

$$B = 3/2$$

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3x+1}{x^2+1}$$

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{-3}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c_4$$ මෙහි c_4 අභිමත නියතයකි.

(c) (i) $n \neq -1$

$$\int x^n(\ln x)\,dx = \int \ln x \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \int \frac{x^{n+1}}{(n+1)x}\,dx$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \int \frac{x^n}{n+1}\,dx$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(\ln x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + c_5$$ මෙහි c_5 අභිමත නියතයකි.

(ii) $$\int_1^3 \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2}\left((\ln 3)^2 - (\ln 1)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

2017

(18) (i) $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ (10)

$1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$

$1 = (A + B)x^2 + (2A + B + C)x + A$

සංගුණක සමාන කිරීමෙන්,

$x^0 : 1 = A$

$x^1 : 0 = 2A + B + C$ (10)

$x^2 : 0 = A + B$

$\therefore A = 1, B = -1$ and $C = -1$ (10)

$\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$ (05)

$= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c'$, මෙහි

c' යනු අභිමත නියතයකි. (15) **50**

(ii) $\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx$ (10)

$= -xe^{-x} - e^{-x} + c''$ (05) මෙහි c'' යනු අභිමත

නියතයකි. (05)

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \int_1^2 xe^{-x} dx$ (05)

$= -(x+1)e^{-x}\Big|_1^2$ (05)

$= 2e^{-1} - 3e^{-2}$ (05)

35

(b) $x = c\tan\theta$ යැයි ගනිමු.

එවිට $dx = c\sec^2\theta \, d\theta$

$x = 0$ වන විට $\theta = 0$ වන අතර $x = c$, වන විට $\theta = \frac{\pi}{4}$ වේ.

එවිට $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln c(1+\tan\theta)}{c^2 + c^2\tan^2\theta} c\sec^2\theta \, d\theta$ (05) (05) (05)

$= \int^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln c(1+\tan\theta)}{\ldots} \cdot c\sec^2\theta \, d\theta$ (05)

එවිට $dx = c\sec^2\theta\, d\theta$

$x = 0$ වන විට $\theta = 0$ වන අතර $x = c$, වන විට $\theta = \frac{\pi}{4}$ වේ.

එවිට $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln c(1+\tan\theta)}{c^2 + c^2\tan^2\theta} \; c\sec^2\theta \; d\theta$ (05) (05) (05)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln c(1+\tan\theta)}{c^2\sec^2\theta} \cdot c\sec^2\theta \; d\theta \quad (05)$$

$$= \frac{1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\ln c + \ln(1+\tan\theta)\}\, d\theta \quad (05)$$

$$= \frac{1}{c}\ln c \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta + \frac{1}{c}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{c}\ln c.\, \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{c} J \quad (05)$$

$$= \frac{\pi}{4c}\ln c + \frac{1}{c} J \quad (05)$$

35

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right) d\theta \quad (05)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left\{1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right\} d\theta \quad (05)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\frac{2}{(1+\tan\theta)}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{\ln 2 - \ln(1+\tan\theta)\}\, d\theta \quad (05)$$

$$= \ln 2 \frac{\pi}{4} - J$$

$$\therefore J = \frac{\pi}{8} \ln 2 \quad (05)$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{4c} \ln c + \frac{1}{c}\frac{\pi}{8} \ln 2 \quad (05)$$

$$= \frac{\pi}{8c} (2 \ln c + \ln 2)$$

$$= \frac{\pi}{8c} \ln (2c^2) \quad (05)$$

2018

(19) (a) i. $Ax^2(x-1) + Bx(x-1) + C(x-1) - Ax^3 = 1$

සංගුණ සැසඳීමෙන් ;

$x^2 : -A + B = 0$ [ල - 05]

$x^1 : -B + C = 0$ [ල - 05]

$x^0 : \quad -C \quad = 1$ [ල - 05]

$A = -1$, $B = -1$, and $C = -1$ [ල - 05] [මු.ල - 20]

$1 = -x^2(x-1) - x(x-1) - (x-1) + x^3$

$\therefore \quad \frac{1}{x^3(x-1)}$ = භින්න භාග ඇසුරින්;

$\frac{1}{x^3(x-1)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x-1}$ ලෙස වේ. [ල - 05]

එනයින්, $\int \frac{1}{x^3(x-1)} dx = -\int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^3} dx + \int \frac{1}{x-1} dx$

$= \ln |x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ln |x-1| + c$

[ල - 05] [ල - 05] [ල - 05] [ල - 05] [ල - 05]

මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ. [මු.ල - 30]

---

ii. $\int x^2 \cos 2x \, dx = \frac{x^2 \sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \int 2x \sin 2x \, dx$ [ල - 05] [ල - 05]

$= \frac{x^2 \sin 2x}{...} ...$

$$\frac{1}{x^3(x-1)} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x-1}$$ ලෙස ...

එනයින්, $\int \frac{1}{x^3(x-1)}\,dx = -\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^3}\,dx + \int \frac{1}{x-1}\,dx$

$= \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \ln|x-1| + c$

ල-05 ල-05 ල-05 ල-05 ල-05

මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ. මු.ල-30

---

ii. $\int x^2 \cos 2x\,dx = \frac{x^2 \sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int 2x \sin 2x\,dx$ ල-05 ල-05

$= \frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x\cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$ ල-05 ල-05

$\frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x\cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$, ල-05 මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ. ල-05

මු.ල-30

(b) $\theta = \tan^{-1}(\cos x);\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\tan\theta = \cos x \Rightarrow \sec^2\theta\,d\theta = -\sin x\,dx$ ල-05

$x = 0 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(1) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ ල-05

$x = \pi \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-1) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ ල-05

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{-\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}} = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\,d\theta$$

ල-05 ල-05 ල-05

$$= \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta)}{\sec\theta + \tan\theta}\,d\theta$$ ල-05

$$= \left[\ln|\sec\theta + \tan\theta|\right]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$ ල-05

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}} = \ln(\sqrt{2}+1) - \ln(\sqrt{2}-1)$$ ල-05

$$= \ln\left[\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{(\sqrt{2}+1)\ (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\ (\sqrt{2}+1)}\right]$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{1}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$ ©-05

©.©-50

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi - x)}}\,dx$$

©-05

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\,dx$$ ©-05

$$\Rightarrow I = \pi\left[2\ln(\sqrt{2}+1)\right] - I$$ ©-05

$$\Rightarrow 2I = 2\pi\ln(\sqrt{2}+1)$$

$$I = \pi\ln(\sqrt{2}+1)$$ ©-05

©.©-20